Comparación de dos proporciones realizadas en grupos independientes. Un problema muy habitual en veterinaria.

Comparar dos grupos es un objetivo tan habitual en el trabajo diario de la práctica veterinaria, que lo realizamos sin darnos cuenta. ¿Cómo diferenciamos qué grupo es mejor que el otro?, o ¿qué tratamiento funciona mejor que el otro? o ¿qué macho da mejores crías que el otro?.

El veterinario puede disponer de dos grupos para realizar observaciones independientes de animales donde se valora una respuesta binaria (por ejemplo, éxito o fracaso de dos tratamientos) o bien de un grupo de animales para realizar observaciones binarias bajo dos situaciones diferentes con lo que evalúa la respuesta en datos apareados. Pongamos un ejemplo para clarificar esta situación.

En la tabla 1 podemos ver el resultado de la primera situación: observaciones en grupos independientes. Se presentan los resultados de los éxitos o fracasos de dos tratamientos en dos muestras de animales. Supongamos que estamos interesados en conocer si el tratamiento del anoestro tras el primer parto en cerdas primíparas es más eficaz cuando realizamos la terapia combinada de PGF_{2}_ seguida a las 24 h con una dosis de PG600 ó la terapia de PG600 sola.

Tabla 1. Resultados de la aplicación de dos terapias frente al anoestro en cerdas primíparas.

Cerda	Tratamiento	Respuesta
201	PGF2_ + PG600	Fracaso
213	PGF2_ + PG600	Fracaso
214	PGF2_ + PG600	Fracaso
215	PG600	Fracaso
218	PGF2_ + PG600	Fracaso
221	PGF2_ + PG600	Fracaso
224	PG600	Fracaso
228	PGF2_ + PG600	Éxito
234	PGF2_ + PG600	Fracaso
240	PG600	Fracaso
241	PG600	Éxito
242	PG600	Fracaso
244	PG600	Éxito
248	PG600	Éxito
250	PG600	Éxito
254	PGF2_ + PG600	Éxito
256	PG600	Éxito
257	PGF2_ + PG600	Fracaso
261	PG600	Fracaso

268	PGF2_ + PG600	Fracaso
270	PG600	Éxito
274	PGF2_ + PG600	Fracaso
276	PG600	Fracaso
277	PG600	Fracaso
278	PGF2_ + PG600	Éxito
281	PG600	Éxito
283	PGF2_ + PG600	Éxito
284	PG600	Fracaso
285	PGF2_ + PG600	Éxito
297	PG600	Fracaso

Esta tabla podemos verla de otra forma:

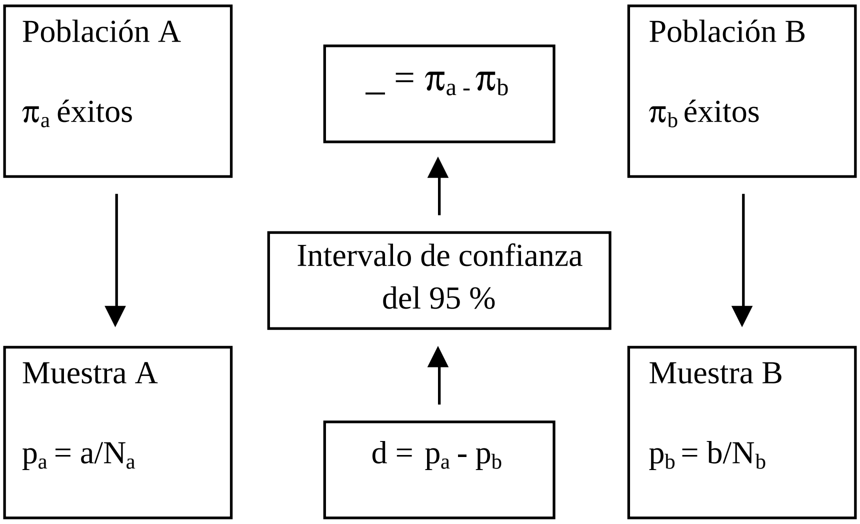
	Tratamiento	
Respuesta	PGF2_ + PG600	PG600
Éxito	5	7
Fracaso	9	9
	14	16

Este tipo de tablas se denominan tablas de contingencia. Existe una nomenclatura para poder conocer cada una de las celdas. Así se denominan:

	Tratamiento	
Respuesta	1	2
Éxito	a	b
Fracaso	c	d
	N_a	N_b

De lo que se trata es de conocer la homogeneidad de las proporciones de éxitos observados después de administrar dos tratamientos a dos muestras diferentes de sujetos. En este tipo de modelo las variables tratamiento y respuesta juegan un papel asimétrico ya que queremos responder a la pregunta de si la respuesta depende del tratamiento.

Este ejemplo responde al siguiente modelo:



Hipótesis nula: _ = $\pi_a - \pi_b = 0$.

Hipótesis alternativa: _ = $\pi_a - \pi_b \neq 0$.

Que p_a sea mayor que p_b no demuestra la superioridad del tratamiento A respecto del tratamiento B, ya que esta superioridad sólo existe si la proporción π_a es mayor que la proporción π_b (proporciones de éxitos al aplicar los tratamientos a las dos poblaciones). No se trata de conocer si las proporciones de éxitos en ambos grupos son diferentes ($p_a \neq p_b$) sino de saber si las proporciones de éxitos en las dos poblaciones son diferentes ($\pi_a \neq \pi_b$).

En la hipótesis nula (_ = $\pi_a - \pi_b = 0$) las dos muestras proceden de poblaciones con la misma proporción de éxitos: ambos tratamientos tienen la misma eficacia. Es la hipótesis de homogeneidad.

En la hipótesis alternativa (_ = $\pi_a - \pi_b \neq 0$) y bilateral las dos muestras proceden de poblaciones con distinta proporción de éxitos: los tratamientos tienen diferente eficacia. Es la hipótesis de independencia.

Comparar estas proporciones equivale a estudiar la relación de dependencia o de independencia de las variables tratamiento y respuesta. En la hipótesis de homogeneidad, la respuesta no depende del tratamiento mientras que en la hipótesis de independencia la respuesta depende del tratamiento.

Análisis de dos proporciones con grupos independientes.

Este tipo de pruebas tienen el fundamento matemático en la distribución muestral de la diferencia. (Remitimos a nuestros lectores a los artículos de septiembre-noviembre par profundizar en el conocimiento matemático de este desarrollo).

En nuestro caso queremos conocer si el tratamiento con (PGF2_ + PG600) es más eficaz o no, que el tratamiento con PG600 en la resolución del anoestro en cerdas primíparas y ver si las diferencias entre las proporciones proceden de poblaciones con igual proporción de éxitos.

Necesitamos saber la variabilidad de las diferencias de las proporciones que nos las proporciona el error estándar de esa distribución que viene dado por la ecuación:

$$\mathrm{EE} = \sqrt{\frac{n_a(1-\pi_a)}{n_a} + \frac{n_b(1-\pi_b)}{n_b}}$$

La prueba se construye suponiendo la hipótesis nula ($\pi_a = \pi_b = \pi$). Si las muestras son grandes, la distribución muestral de las diferencias entre las proporciones observadas sigue una ley Normal de media 0 y de desviación estándar:

$$\mathrm{EE} = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{\mathrm{n_a}} + \frac{\pi(1-\pi)}{n_b}}$$

Si suponemos la hipótesis nula H_0 la mejor estimación de π se obtiene uniendo ambas muestras:

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{n_a}+\mathrm{n}_b}$$

Las proporciones de éxito p_a y p_b:

$$\mathrm{p_a} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n_a}} \qquad \mathrm{p_b} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{n_b}} \qquad \mathrm{p} = \frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{n_a}+\mathrm{n_b}} = \frac{\mathrm{n_a p_a} + \mathrm{n_b p_b}}{\mathrm{n_a}+\mathrm{n_b}}$$

Y la estimación del error estándar:

$$\mathrm{EE} = \sqrt{\frac{\mathrm{p(1-p)}}{\mathrm{n_a}} + \frac{\mathrm{p(1-p)}}{\mathrm{n_b}}}$$

El estadístico necesario de contraste es el valor z,

$$z = \frac{d}{EE}$$

Nos falta comparar el estadístico calculado z con el valor de z en una ley Normal de media 0 y desviación estándar 1 con un valor _ = 0,05. Si nuestro valor z es menor o igual al valor z hallado, nuestra diferencia no es significativa y por lo tanto la proporción de éxitos con ambos tratamientos es la misma. Si nuestro valor z es mayor o igual al valor z hallado, nuestra diferencia es significativa y el éxito de los tratamientos es diferente.

Pero en los estudios comparativos no sólo estamos interesados en conocer la asociación entre las dos variables. Nos interesa saber también la magnitud de la asociación, es decir la magnitud de la diferencia entre las dos proporciones de éxito. El intervalo de confianza nos valora la relevancia clínica del resultado. Además la estimación de la diferencia entre las dos proporciones no presupone la hipótesis de igualdad de las respuestas. Por la tanto una alternativa a la anterior prueba de significación z es el intervalo de confianza que estima la magnitud de la verdadera diferencia _ = π_a- π_b entre las proporciones de éxitos de los dos tratamientos.

El intervalo de confianza de la diferencia entre dos proporciones en grupos independientes se calcula:

Diferencia observada: $d = p_a - p_b$

Error estándar: $$\hat{EE} = \sqrt{\frac{p_a(1-p_a)}{n_a} + \frac{p_b(1-p_b)}{n_b}}$$

Intervalo de confianza 1- _: $(p_a - p_b) \pm z_{\alpha/2}\,\hat{EE}$

Si el intervalo de confianza incluye el valor _ = 0, la diferencia se considera no significativa. Conviene interpretar los intervalos de confianza de una forma conservadora considerando siempre su límite inferior.

Así pues, ¿cuál es el tratamiento más eficaz para el tratamiento del anoestro en cerdas primíparas?. La solución está en nuestra web: http://www.testsandtrials.com.